



Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji



Metoda elementów skończonych (MES2)

Wykład 3. Zagadnienia dynamiki

10.2025

Wprowadzenie do zagadnienia dynamiki struktur

Nieustalone równanie równowagi dynamicznej dla liniowej struktury dyskretnej (równania ruchu)

$$\begin{matrix} \overset{\circ\circ}{[M]} & \overset{\circ}{[C]} & [K] & = & \{F(t)\} \\ n \times n & n \times n & n \times n & & n \times 1 \\ n \times 1 & n \times 1 & n \times 1 & & \end{matrix}$$

gdzie: $[M]$ - macierz masowa (bezwładności),
 $[C]$ - macierz tłumienia,
 $[K]$ - macierz sztywności,
 $\{q\}$ - wektor przemieszczeń węzłowych,
 $\{\dot{q}\}$ - wektor prędkości węzłowych,
 $\{\ddot{q}\}$ - wektor przyspieszeń węzłowych,
 $\{F(t)\}$ - wektor obciążenia.

Energia odkształcenia sprężystego:

$$U = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [K] \{\dot{q}\}$$

Energia kinetyczna:

$$T = \frac{1}{2} [\dot{q}]^T [M] \{\dot{q}\}$$

Macierz tłumienia przedstawiana jest jako kombinacja liniowa macierzy bezwładności i macierzy sztywności:

$$[C] = \alpha_t [M] + \beta_t [K] \quad \text{- model tłumienia Rayleigha}$$

α_t, β_t - współczynniki tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego
 (wyznaczane doświadczalnie)

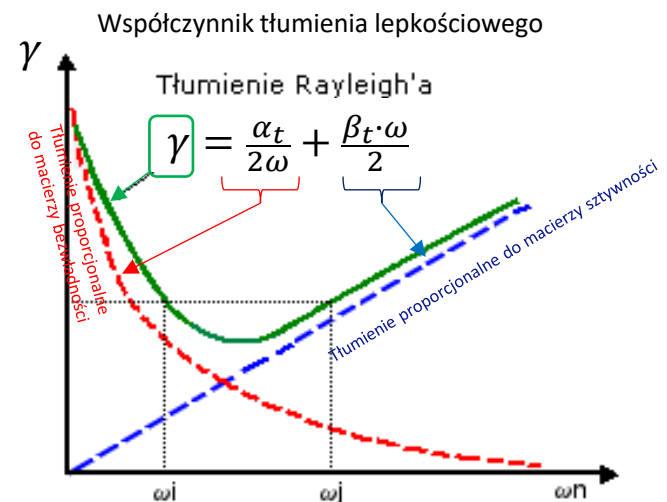
Przypadki szczególne:

$\{F(t)\} = \{0\}$ - drgania swobodne

$\{F(t)\} = \{0\}$, $[C]=[0]$ - drgania swobodne bez tłumienia

$[M]=[0]$, $\{F(t)\} = \{0\}$, $[C]=[0]$ - problem statyki liniowej

$$\{\dot{q}\} = \frac{d}{dt} \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{dq_1(t)}{dt} \\ \frac{dq_2(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{dq_n(t)}{dt} \end{Bmatrix}, \quad \{\ddot{q}\} = \frac{d^2}{dt^2} \{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{d^2 q_1(t)}{dt^2} \\ \frac{d^2 q_2(t)}{dt^2} \\ \dots \\ \frac{d^2 q_n(t)}{dt^2} \end{Bmatrix}$$



WARTOŚCI WŁASNE I WEKTORY WŁASNE W ALGEBRZE

Rozważmy szczególną postać układu liniowego, w którym wektor po prawej stronie jest wielokrotnością wektora rozwiązania $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$$

lub rozpisując:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & \lambda x_2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & \lambda x_n \end{array}$$

Jest to standardowe (klasyczne) algebraiczne zagadnienie na wartości własne.

Układ można przekształcić do postaci jednorodnej $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nietrywialne rozwiązanie tego równania jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ jest osobliwa, a jej wyznacznik: $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$

W rezultacie otrzymujemy algebraiczne równanie wielomianowe stopnia n ze względu na λ :

$$P(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0$$

Jest to znane jako **równanie charakterystyczne** macierzy $\mathbf{A}$. Lewa strona nazywana jest **wielomianem charakterystycznym**. Wiemy, że wielomian stopnia n ma n (zwykle zespolonych) pierwiastków $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Te n liczb nazywane są **wartościami własnymi** macierzy $\mathbf{A}$.

Dla każdej wartości własnej λ_i mamy związany z nią wektor własny $\mathbf{x}_i$ który spełnia równanie $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$.

Wektor własny jest określony tylko do pewnego współczynnika skali: jeśli $\mathbf{x}_i$ jest wektorem własnym, to $\beta \mathbf{x}_i$ również, gdzie β jest dowolną liczbą różną od zera.

Wektory własne są często normalizowane, tak że np. ich długość euklidesowa wynosi 1.

Drgania swobodne - analiza modalna

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{0\} \quad - \text{układ równań różniczkowych drugiego rzędu}$$

Rozwiązanie ogólne: $\{q(t)\} = \{q\}_A \cos \omega t + \{q\}_B \sin \omega t$

$\{q\}_A, \{q\}_B$ - wektory obliczone z warunków początkowych

ω - częstość własna

$$\{\ddot{q}\} = -\omega^2 \{q\}_A \cos \omega t - \omega^2 \{q\}_B \sin \omega t = -\omega^2 \{q\}$$

$$-\omega^2 [M]\{q\} + [K]\{q\} = \{0\} \longrightarrow ([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\} \quad - \text{problem na wartości własne}$$

Rozwiązanie trywialne: $\{q\} = \{0\}$

Rozwiązania nietrywialne: $\det([K] - \omega^2 [M]) = 0$

Wyznacznik - wielomian n-tego stopnia w odniesieniu do ω^2

Rozwiązaniami są częstości własne (wartości własne) ω_i

Odpowiednie wektory własne nazywane są postaciami własnymi $\{q\}_i$

Zwykle wektory własne normalizuje się: $[q]_i \{q\}_j = [q]_i [I] \{q\}_j = \delta_{ij}$ lub $[q]_i [M] \{q\}_j = \delta_{ij}$

Rozwiązanie jest znacznie bardziej czasochłonne niż rozwiązanie układu równań liniowych w analizie statycznej.

Do znalezienia ograniczonej liczby wartości własnych (częstości własnych) w interesującym zakresie stosuje się iteracyjne techniki numeryczne.

Macierz masowa elementu skończonego

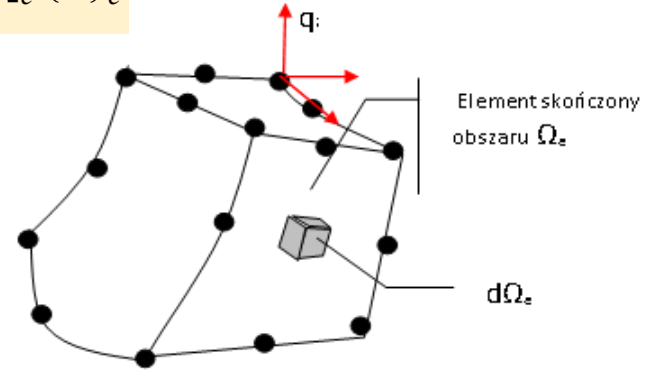
Zdefiniujmy energię kinetyczną elementu: $T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e [m]_e \{\dot{q}\}_e$

Wektor przemieszczenia w elemencie: $\{u\} = [N] \{q\}_e$

Wektor prędkości: $\frac{d}{dt} \{u\} = [N] \{\dot{q}\}_e$

Energia kinetyczna części $d\Omega_e$ elementu skończonego Ω_e :

$$dT_e = \frac{1}{2} [\dot{u}] dm \{\dot{u}\} = \frac{1}{2} [\dot{u}] \rho \{\dot{u}\} d\Omega_e \quad \longrightarrow \quad dT_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e [N]^T \cdot \rho [N] \{\dot{q}\}_e d\Omega_e$$



$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}]_e \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e \{\dot{q}\}_e \quad - \text{energia kinetyczna elementu skończonego o objętości } \Omega_e$$

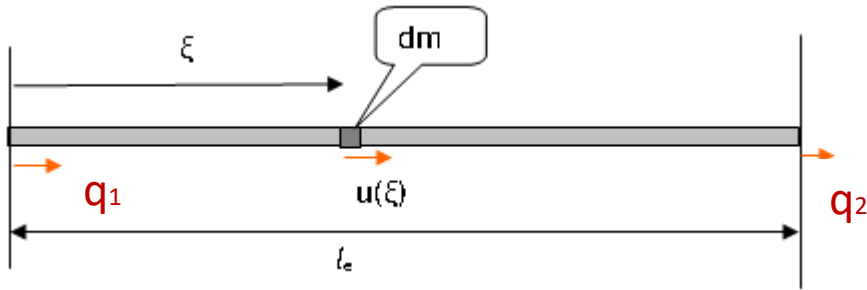
$$[m]_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e$$

Ogólny wzór na macierz masową elementu skończonego:

Wyrażenie opisuje tak zwaną spójną macierz masową (*określoną przy użyciu tego samego podejścia co macierz sztywności*).

Aby uprościć obliczenia w algorytmach numerycznych można również użyć tak zwanej skupionej macierzy mas (diagonalnej)

Macierz masowa dla elementu prętowego



Macierz mas dla elementu osiowego

$$T_e = \int_0^{l_e} \frac{dm(\dot{u})^2}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} (\dot{u})^2 \rho A d\xi$$

Prędkość cząstek wzdłuż elementu:

$$\dot{u}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

Po obliczeniu całek otrzymujemy:

$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}_1, \dot{q}_2] [m]_e \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}$$

$$[m]_e = \int_{\Omega_e} \{N\} \rho [N] d\Omega_e \quad \longrightarrow$$

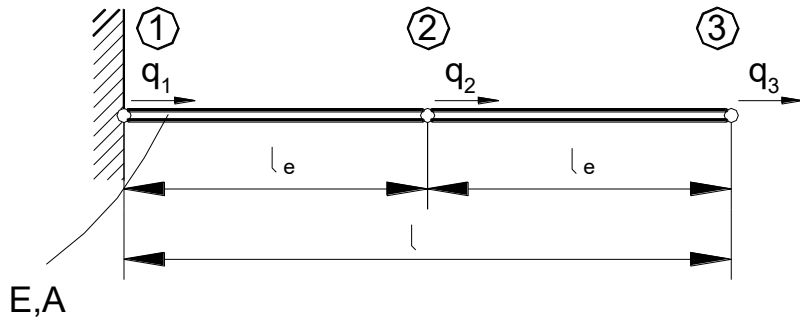
$$[m_e] = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

*Konsystentna
macierz masowa
dla pręta*

Postać diagonalna (skupiona) macierzy:

$$[m]_e = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l_e}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho A l_e}{2} \end{bmatrix}$$

Przykład 1 swobodne drgania osiowe pręta zamocowanego na jednym końcu
– model z 2 elementami



Rozwiązanie analityczne

$$\omega_i^s = \frac{2i-1}{2} \pi \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\begin{aligned} \omega_1^s &= 1.5708 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \\ \omega_2^s &= 4.7124 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \end{aligned}$$

Rozwiązanie MES przy użyciu modelu z 2 elementami skończonymi

Równanie swobodnych drgań $\left([K] - \omega^2 [M]\right)\{q\} = \{0\}$

Macierz sztywności i macierz masowa dla obu elementów:

$$[k]_e = \frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [m]_e = \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad l_e = \frac{l}{2}$$

$$\left(\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{q_1=0} \left(\frac{EA}{l_e} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

podstawiając: $\lambda = \omega^2 \frac{\rho A l_e}{6} \bigg/ \frac{EA}{l_e} = \frac{\rho l_e^2}{6E} \omega^2$ mamy: $\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

rozwiązanie nietrywialne dla: $\det \begin{bmatrix} 2-4\lambda & -(1+\lambda) \\ -(1+\lambda) & (1-2\lambda) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow 7\lambda^2 - 10\lambda + 1 = 0$
równanie charakterystyczne

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy:

$$\lambda_1 = 0.1082 \rightarrow \omega_1 = 0.8057 \frac{1}{l_e} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 1.6114 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\lambda_2 = 1.3204 \rightarrow \omega_2 = 2.8148 \frac{1}{l_e} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = 5.6293 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Porównanie z dokładnym rozwiązaniem

$$\omega_1^s = 1.5708 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

$$\omega_2^s = 4.7124 \frac{1}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

mamy względne błędy
częstości własnych
wynoszące 2,6% i 19,5%.

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy: $\begin{cases} \lambda_1 = 0.1082 \\ \lambda_2 = 1.3204 \end{cases}$

Wektory własne:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2-4\lambda & -(1+\lambda) \\ -(1+\lambda) & (1-2\lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda)}{2(1-2\lambda)} \cdot q_3 \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda)}{(1+\lambda)} \cdot q_3 \end{cases}$$

Uwzględniając, że $\mathbf{q}_1 = \mathbf{0}$ i przyjmując, że $\mathbf{q}_3 = \Delta$ mamy, dla kolejnych pierwiastków równania charakterystycznego macierzy:

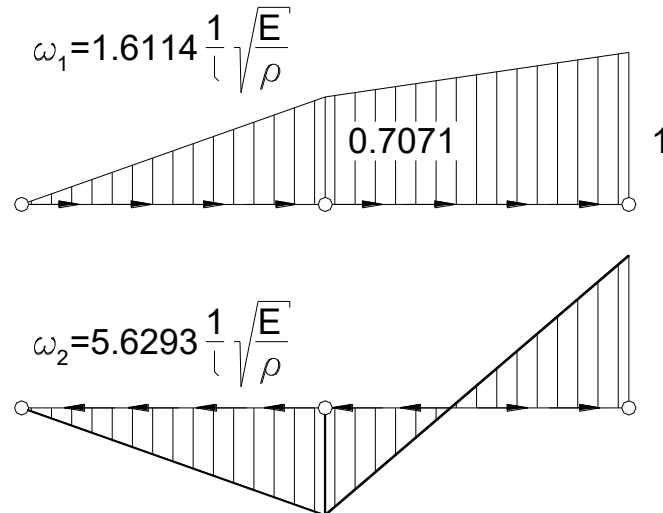
$$\lambda_1 = 0.1082 \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda_1)}{2(1-2\lambda_1)} \cdot \Delta \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda_1)}{(1+\lambda_1)} \cdot \Delta \end{cases} = 0.707 \cdot \Delta$$

$$\lambda_2 = 1.3204 \Rightarrow \begin{cases} q_2 = \frac{(1+\lambda_2)}{2(1-2\lambda_2)} \cdot \Delta \\ q_2 = \frac{(1-2\lambda_2)}{(1+\lambda_2)} \cdot \Delta \end{cases} = -0.707 \cdot \Delta$$

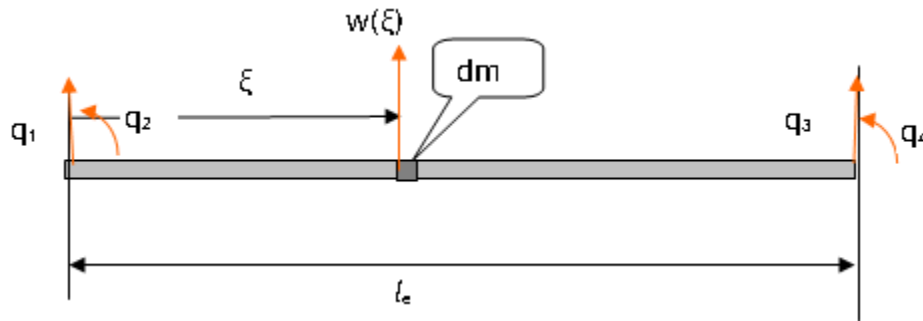
Mamy zatem postaci drgań:
(wektory własne)

$$[q]_1 = [0, \quad 0.707\Delta, \quad \Delta]$$

$$[q]_2 = [0, \quad -0.707\Delta, \quad \Delta]$$



Macierz masowa prostego elementu belkowego



Energia kinetyczna segmentu $d\xi$ belki

$$dT_e = dm \cdot (\dot{w})^2 / 2$$

(bez ruchu obrotowego)

Prędkość segmentu:

$$\dot{w}(\xi) = [N_1(\xi), N_2(\xi), N_3(\xi), N_4(\xi)] \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

funkcje kształtu elementu belki:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= 1 - 3\frac{\xi^2}{l_e^2} + 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_2(\xi) &= \xi - 2\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}, \\ N_3(\xi) &= 3\frac{\xi^2}{l_e^2} - 2\frac{\xi^3}{l_e^3}, \\ N_4(\xi) &= -\frac{\xi^2}{l_e} + \frac{\xi^3}{l_e^2}. \end{aligned}$$

Energia kinetyczna:

$$T_e = \int_0^{l_e} dT_e = \frac{1}{2} \int_0^{l_e} (\dot{w})^2 \rho A d\xi$$

$$T_e = \frac{1}{2} [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dot{q}_4] \cdot \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{Bmatrix}$$

konsystentna macierz masowa belki:

$$[m]_e = \frac{\rho A l_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l_e & 54 & -13l_e \\ & 4l_e^2 & 13l_e & -3l_e^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l_e \\ & & & 4l_e^2 \end{bmatrix}$$

Ten sam wynik można uzyskać stosując ogólny wzór: $[m]_e = \int_{\Omega_e} [N]^T \rho [N] d\Omega_e$

Przykład 2 – Obliczyć częstotliwości drgań własnych belki wspornikowej o długości l , wykorzystując model w postaci jednego elementu belkowego.

Jednoelementowy model MES:

UWAGA –

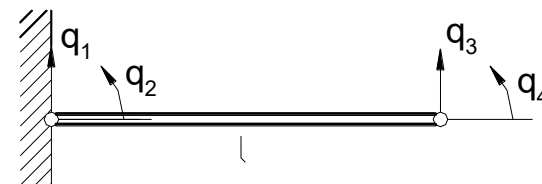
- 1) bez rotacji,
- 2) są tylko 2 masowe stopnie swobody



Dokładne rozwiązanie analityczne:

$$\begin{aligned}\omega_1^s &= 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \\ \omega_2^s &= 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \\ \omega_i^s &= \left[\frac{(2i-1)\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad i = 3, 4, \dots\end{aligned}$$

Rozwiązanie MES - problem na wartości własne



Równanie swobodnych drgań: $([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$

dla belki:

$$\left(\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ & 2l^2 & -3l & l^2 \\ \text{sym.} & & 6 & -3l \\ & & & 2l^2 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ \text{sym.} & & 156 & -22l \\ & & & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Warunki brzegowe: $q_1 = 0$ i $q_2 = 0$

$$\left(\frac{2EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 \rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \iff \det \left(\begin{bmatrix} 6 & -3l \\ -3l & 2l^2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 156 & -22l \\ -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Korzystanie z nowego parametru:

$$\lambda = \frac{\rho Al^4}{840EI} \cdot \omega^2$$

otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$140\lambda^2 - 204\lambda + 3 = 0$$

i pierwiastki:

$$\lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2},$$

$$\lambda_2 = 1.4423.$$

$$\omega_1 = 3,533 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_2 = 34,81 \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}.$$

analityczne:

$$\omega_1^s = 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_2^s = 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

błąd:

0.5%

58%

Pierwiastki równania charakterystycznego macierzy: $\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2}, \\ \lambda_2 = 1.4423. \end{array} \right.$

Wektory własne:

$$\left[\begin{array}{c|c} 6-156\lambda & -3l+22l\lambda \\ \hline -3l+22l\lambda & 2l^2-4l^2\lambda \end{array} \right] \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$q_4 = \frac{-(6-156\lambda)}{(-3+22\lambda)} \cdot \frac{q_3}{l}$$

$$q_4 = \frac{-3+22\lambda}{-2+4\lambda} \cdot \frac{q_3}{l}$$

Zakładając $q_3 = \Delta$

$$[q]_1 = [q_3, q_4]_1 \rightarrow \omega_1 \xrightarrow{\lambda_1 = 1.4857 \cdot 10^{-2}}$$

$$q_4 = 1.38 \frac{\Delta}{l}$$

$$[q]_2 = [q_3, q_4]_2 \rightarrow \omega_2 \xrightarrow{\lambda_2 = 1.4423}$$

$$q_4 = 7.62 \cdot \frac{\Delta}{l}$$

dla pierwszej postaci

$$[q]_1 = \left[0, 0, \Delta, 1.38 \frac{\Delta}{l} \right],$$

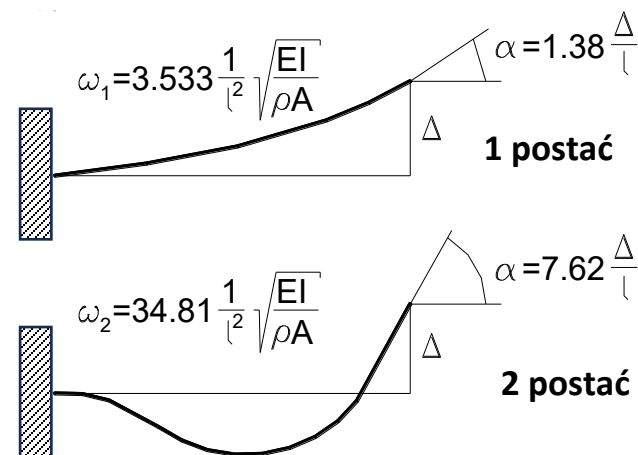
dla drugiej postaci

$$[q]_2 = \left[0, 0, \Delta, 7.62 \frac{\Delta}{l} \right].$$

W ANALIZIE MODALNEJ MES:

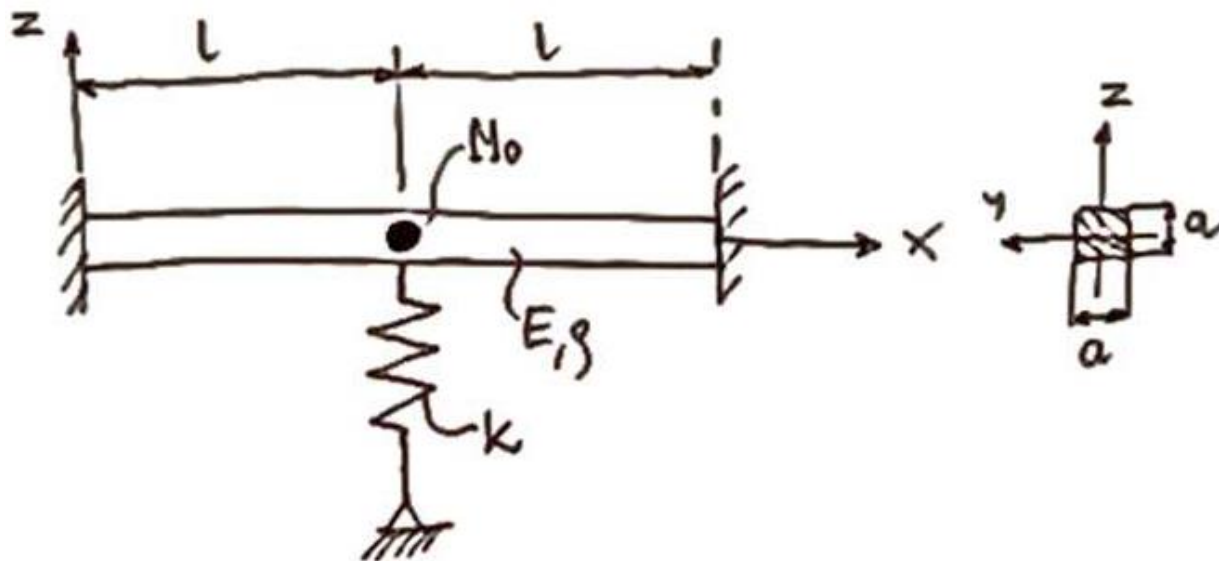
Dobra dokładność wyników (*częstości własne i postaci drgań*) nawet w przypadku zgrubnego tworzenia siatki.

Zwykle lepsza dokładność odpowiada niższej częstości



Przykład 3. Zbuduj model elementów skończonych analizy modalnej struktury 2D składającej się z belki, sprężyny i masy M_0 . Belka jest reprezentowana przez 2 elementy skończone.

Znajdź częstotliwości własne (f_1, f_2) i odpowiadające im wektory własne. Narysuj postać drgań. Oblicz minimalną wartość sztywności sprężyny, tak aby postać drgań o zerowym przesunięciu masy M_0 stał się pierwszą postacią drgań.



$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$L = 1000 \text{ mm}$$

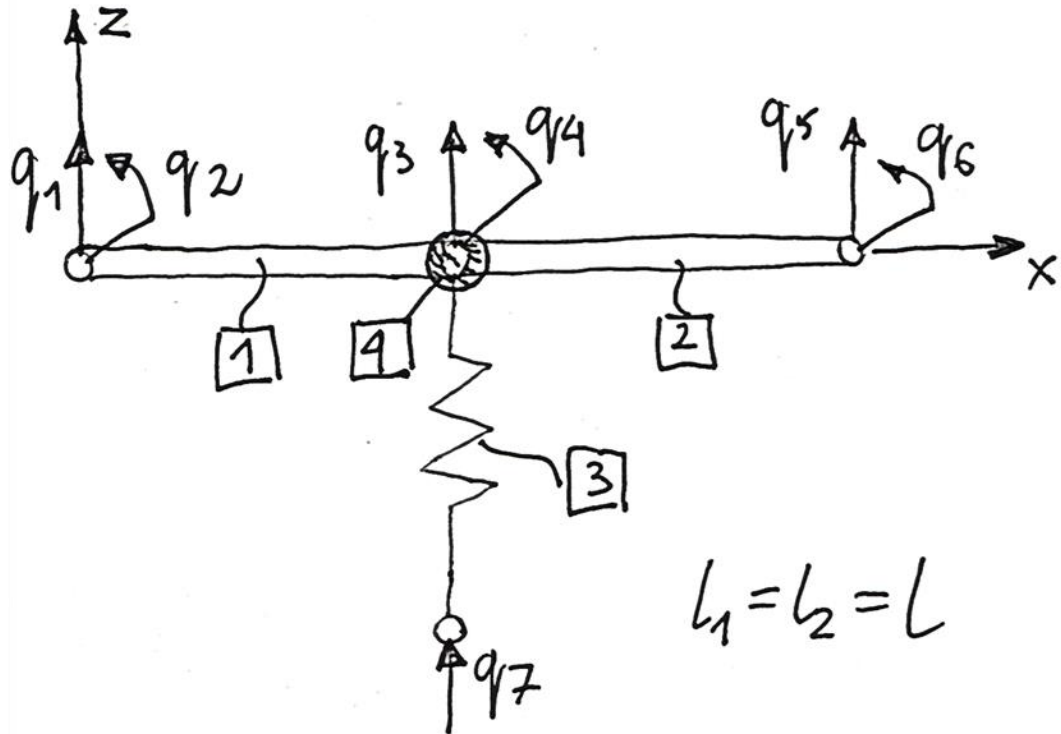
$$a = 40 \text{ mm}$$

$$\rho = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$M_0 = 20 \text{ kg}$$

$$k = 5000 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

$$A = a^2, \quad J_y = \frac{a^4}{12}$$



$$L_1 = L_2 = L$$

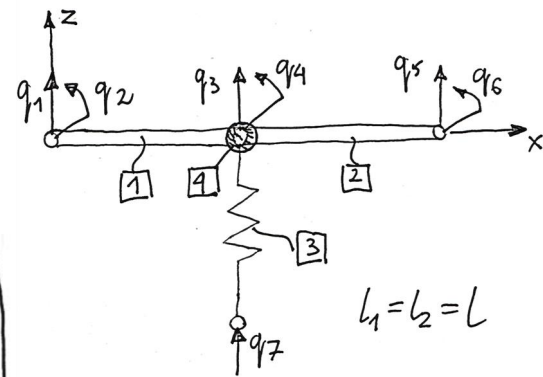
Globalny wektor parametrów węzłowych:

$$\underset{1 \times 7}{Lq} = [q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7]$$

Lokalna macierz sztywności:

$$[k]_1 = [k]_2 = \frac{2EJ_y}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} = \frac{Ea^4}{6l^3} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3 = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad [k]_4 = [0]_{(1 \times 1)}$$

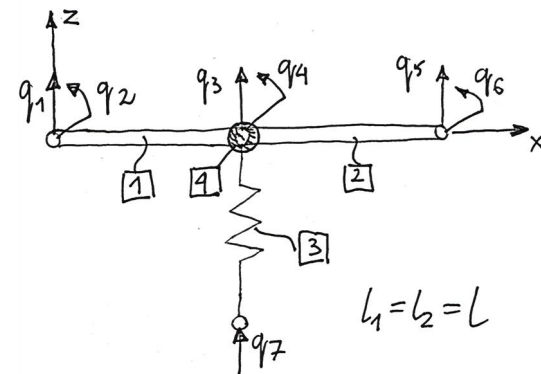


Lokalna macierz masowa:

$$[m]_1 = [m]_2 = \frac{5a^2l}{420} \cdot \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}$$

$$[m]_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 2}, \quad [m]_4 = [M_0]_{(1 \times 1)}$$

Rozszerzone macierze sztywności:



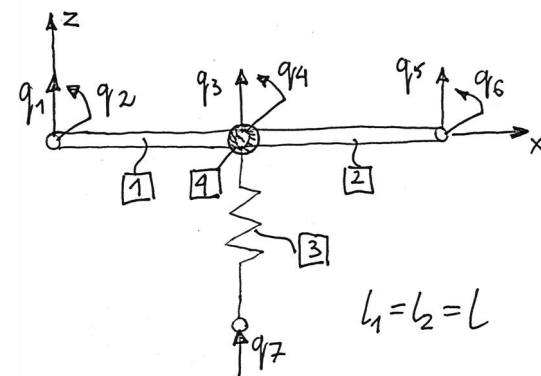
$$[k]_1^* = \begin{bmatrix} \boxed{[k]_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{[k]_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; [k]_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{[k]_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{[k]_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k]_3^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 & 0 & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

$$; [k]_4^* = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

Rozszerzone macierze masowe:



$$[m]_1^* = \begin{bmatrix} \boxed{[m]_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

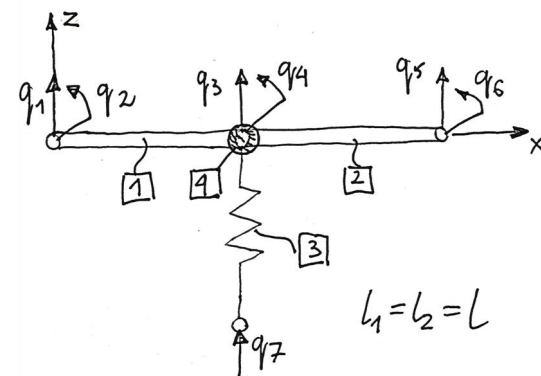
$$[m]_2^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{[m]_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[m]_3^* = [0]$$

$$[m]_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Globalna macierz sztywności:

$$[K]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [k]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$



Globalna macierz masowa:

$$[M]_{7 \times 7} = \begin{bmatrix} [m]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [m]_2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Warunki brzegowe:

$$q_1 = 0, q_2 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0, q_7 = 0$$

Układ równań: $([K] - \omega^2 [M])\{q\} = \{0\}$

$[K] = \begin{bmatrix} [k]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [k]_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{bmatrix}_{7 \times 7}$
 $[M] = \begin{bmatrix} [m]_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [m]_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 7}$

$$\left(\begin{bmatrix} k_{33-1} + k_{11-2} + k & k_{34-1} + k_{12-2} \\ k_{43-1} + k_{21-2} & k_{44-1} + k_{22-2} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_{33-1} + m_{11-2} + M_0 & m_{34-1} + m_{12-2} \\ m_{43-1} + m_{21-2} & m_{44-1} + m_{22-2} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$k_{33-1} + k_{11-2} + k = \frac{6Ea^4}{6L^3} + \frac{6Ea^4}{6L^3} + k = \frac{2Ea^4}{L^3} + k$$

$$k_{34-1} + k_{12-2} = -\frac{3L \cdot Ea^4}{6L^3} + \frac{3L \cdot Ea^4}{6L^3} = 0 = k_{43-1} + k_{21-2}$$

$$k_{44-1} + k_{22-2} = \frac{2L^2 \cdot Ea^4}{6L^3} + \frac{2L^2 \cdot Ea^4}{6L^3} = \frac{2Ea^4}{3L}$$

$$m_{33-1} + m_{11-2} + M_0 = \frac{156 \cdot \rho a^2 L}{420} + \frac{156 \cdot \rho a^2 L}{420} + M_0 = \frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0$$

$$m_{34-1} + m_{12-2} = -\frac{22L \cdot \rho a^2 L}{420} + \frac{22L \cdot \rho a^2 L}{420} = 0 = m_{43-1} + m_{21-2}$$

$$m_{44-1} + m_{22-2} = \frac{4L^2 \cdot \rho a^2 L}{420} + \frac{4L^2 \cdot \rho a^2 L}{420} = \frac{2 \rho a^2 L^3}{105}$$

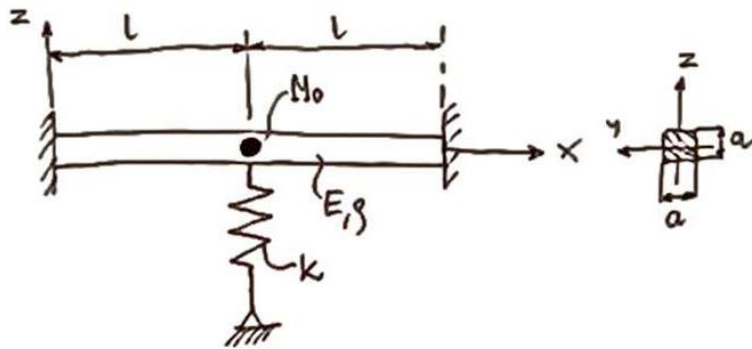
$$\left(\begin{bmatrix} \frac{2Ea^4}{L^3} + k & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3L} \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{26 \rho a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2 \rho a^2 L^3}{105} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

The diagram shows a horizontal beam along the x-axis with a vertical z-axis at the origin. A mass is attached to the beam at a distance l_1 from the origin. A spring is attached to the mass and extends vertically downwards to a fixed support at a distance l_2 from the mass. The spring constant is k . The mass has a moment of inertia I about the z-axis. The beam is divided into three segments by the mass and another support at distance $l_1 + l_2$ from the origin. The segments are labeled 1, 4, and 2. The forces $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7$ are shown as arrows acting on the beam and the mass. The distance $l_1 = l_2 = L$ is indicated.





$$W_2 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2ga^2L^3}{105}}} = \frac{a}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{g}}$$



Częstotliwość drgań:

$$f = \omega / 2\pi$$

częstość własna

$$\begin{aligned} E &= 2 \cdot 10^5 \text{ MPa} \\ L &= 1000 \text{ mm} \\ a &= 40 \text{ mm} \\ \rho &= 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\ M_0 &= 20 \text{ kg} \\ k &= 5000 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \end{aligned}$$

$$A = a^2, \quad J_y = \frac{a^4}{12}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{L^3} + k}{\frac{26\rho a^2 L}{35} + M_0}}$$

$$= 453.7 \text{ } 1/\text{s}$$

$$f_1 = 72.2 \text{ Hz}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105}}}$$

$$= \frac{a}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{\rho}} = 1198.3 \text{ } 1/\text{s}$$

$$f_2 = 190.71 \text{ Hz}$$

Wektory własne:

$$\begin{pmatrix} \frac{2Ea^4}{l^3} + k & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3L} \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \frac{26\vartheta a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2\vartheta a^2 l^3}{105} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2Ea^4}{l^3} + k - \omega^2 \frac{26\vartheta a^2 L}{35} + M_0 & 0 \\ 0 & \frac{2Ea^4}{3L} - \omega^2 \frac{2\vartheta a^2 l^3}{105} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

oznaczmy:

$$\Phi(\omega_i) = \frac{2Ea^4}{l^3} + k - \omega_i^2 \left(\frac{26\vartheta a^2 L}{35} + M_0 \right)$$

$$\Psi(\omega_i) = \frac{2Ea^4}{3L} - \omega_i^2 \cdot \frac{2\vartheta a^2 l^3}{105}$$

Mamy zatem:

$$\begin{cases} \Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + 0 \cdot q_4(\omega_i) = 0 \\ 0 \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + 0 \cdot q_4(\omega_i) = 0 \\ 0 \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0 \end{cases}$$

$\underline{I} + \underline{II} :$

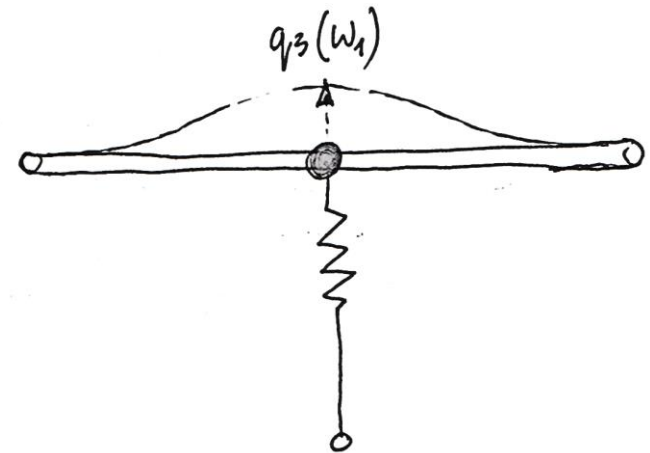
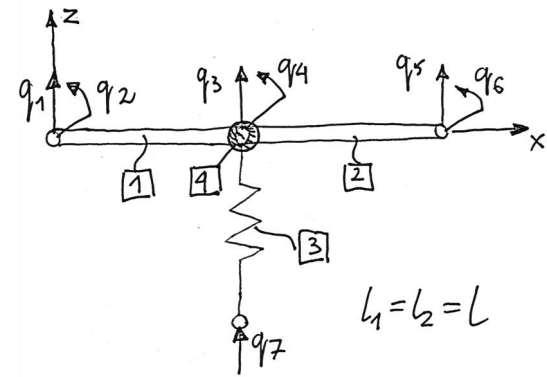
$$\Phi(\omega_i) \cdot q_3(\omega_i) + \Psi(\omega_i) \cdot q_4(\omega_i) = 0$$

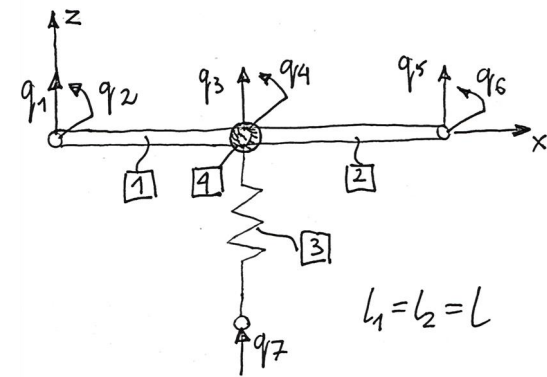
for ω_1 : $\Phi(\omega_1) = 0$, $\Psi(\omega_1) \neq 0$

$$0 \cdot q_3(\omega_1) + \Psi(\omega_1) \cdot \underbrace{q_4(\omega_1)}_{\substack{\text{any real value} \\ \rightarrow = 0}} = 0$$

1st vibration mode

$$f_1 = 72.2 \text{ Hz}$$



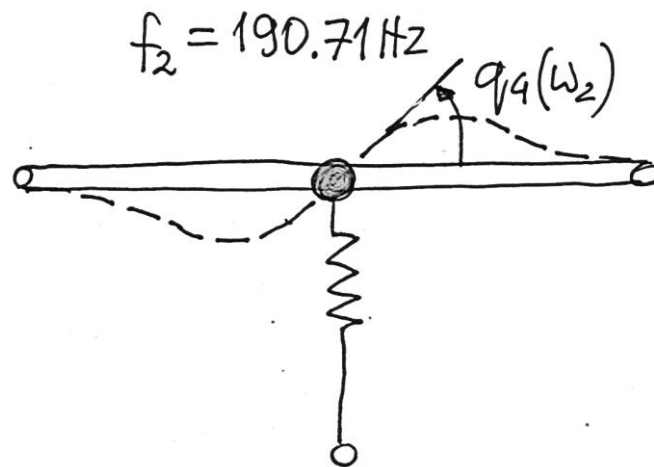


for ω_2 : $\bar{\Phi}(\omega_2) \neq 0$, $\Psi(\omega_2) = 0$

$$\bar{\Phi}(\omega_2) \cdot \underbrace{q_3(\omega_2)}_{=0} + 0 \cdot q_4(\omega_2) = 0$$

$\hookrightarrow$ any real value

2nd vibration mode



$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{l^3} + k}{\frac{26ga^2l}{35} + M_0}}$$

$$\omega_2 = \frac{a}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{35E}{g}}$$

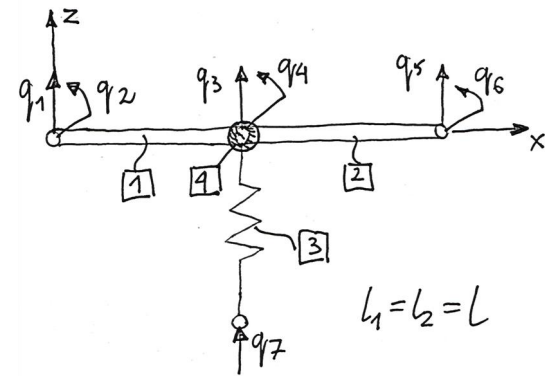
b) for ω_2 Mass M_0 only rotates:

$$\tilde{\omega}_1^2 > \omega_2^2$$

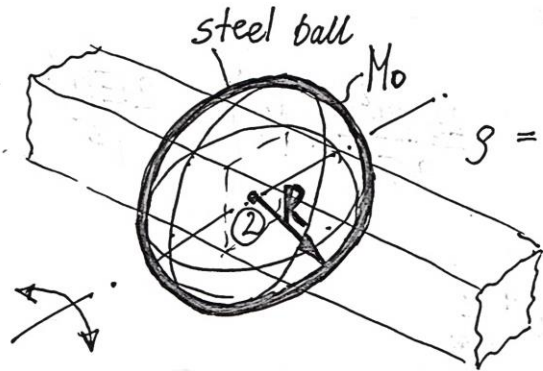
$$\frac{\frac{2Ea^4}{l^3} + \tilde{k}}{\frac{26ga^2l}{35} + M_0} > \frac{35Ea^2}{gl^4}$$

$$\tilde{k} > \frac{35Ea^2}{gl^4} \cdot \left(\frac{26ga^2l}{35} + M_0 \right) - \frac{2Ea^4}{l^3}$$

$$\tilde{k} > 4.1 \cdot 10^4 \frac{N}{mm}$$



if the moment of inertia is considered :



$$\rho = \frac{M_0}{V} = \frac{3M_0}{4\pi R^3} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{3M_0}{4\pi \rho}} = 85 \text{ mm}$$

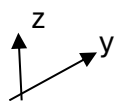
$$J_0 = \frac{2}{5} M_0 \cdot R^2 = \frac{2}{5} \cdot 0.02 \frac{\text{Ns}^2}{\text{mm}} \cdot 85^2 \text{ mm}^2 = 57.8 \text{ Ns}^2 \text{ mm}$$

$$[m']_4^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_2' = \sqrt{\frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105} + J_0}} = 1074.7 \frac{1}{\text{s}}$$

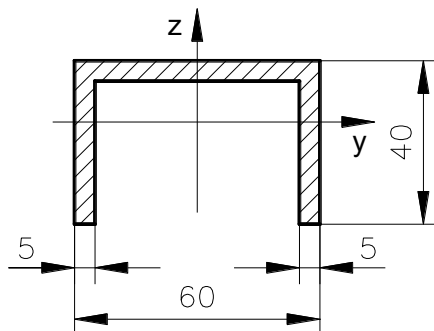
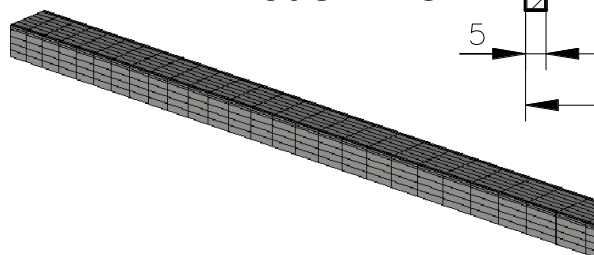
$$f_2' = 171 \text{ Hz}$$

$$\tilde{k}' > \frac{\frac{2Ea^4}{3L}}{\frac{2\rho a^2 L^3}{105} + J_0} \left(\frac{26\rho a^2 L}{35} + M_0 \right) - \frac{2Ea^4}{L^3}, \quad \tilde{k}' > 3.28 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}}$$

Przykład 4a – drgania swobodne belki wspornikowej – postaci drgań własnych i częstości drgań własnych



model MES



$$E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu=0.3$$

$$\rho=8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

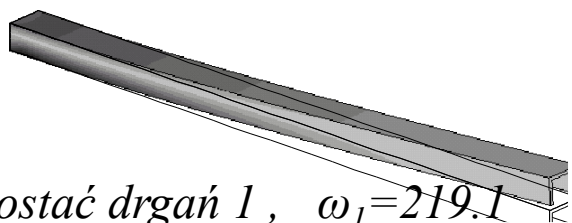
Dokładne rozwiązanie analityczne tylko dla postaci giętnych:

$$\omega_1^s = 3.5156 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_2^s = 22.0346 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}},$$

$$\omega_i^s = \left[\frac{(2i-1)\pi}{2} \right]^2 \cdot \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}, \quad i = 3, 4, \dots,$$

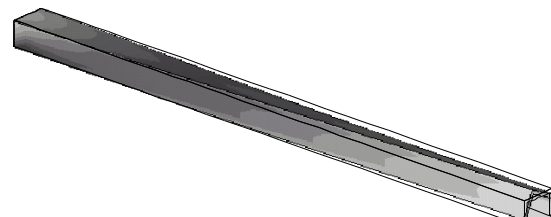
postać drgań 1, $\omega_1=219.1$
drgania giętne w pł. xz



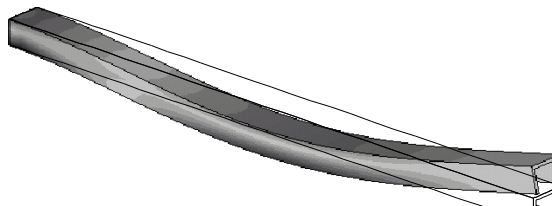
postać drgań 2, $\omega_2=333.3$
drgania skrętne



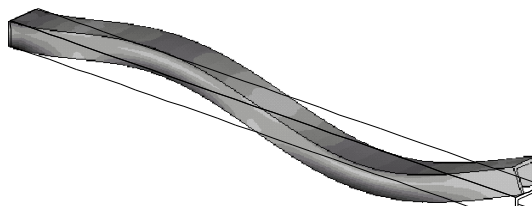
postać drgań 3, $\omega_3=769.5$
drgania giętno-skrętne



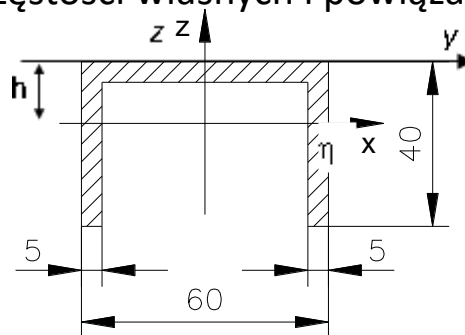
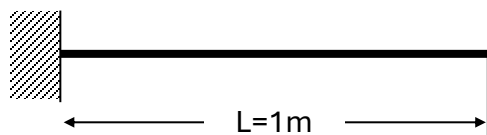
postać drgań 4, $\omega_4=1353.73$
drgania giętne w pł. xz



postać drgań 5, $\omega_5=3704.3$
drgania giętne w pł. xz



Przykład 4b Znajdź pierwszych 8 częstości własnych i powiązane postaci własne belki wspornikowej



$$E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$

$$\nu=0.3$$

$$\rho=8 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$J=J_{\eta}=1.0097 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4$$

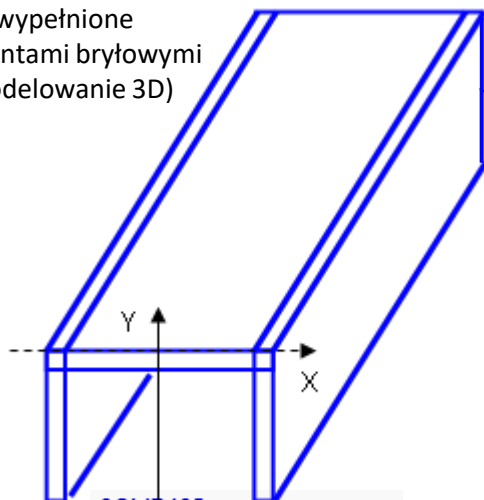
$$A=0.6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \quad h=13.27 \text{ mm}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Trzy sposoby modelowania zadania

Zad. 1

Wyciągnięcie powierzchni daje bryły, wypełnione elementami bryłowymi (modelowanie 3D)



SOLID185

3-D 8-Node Structural Solid

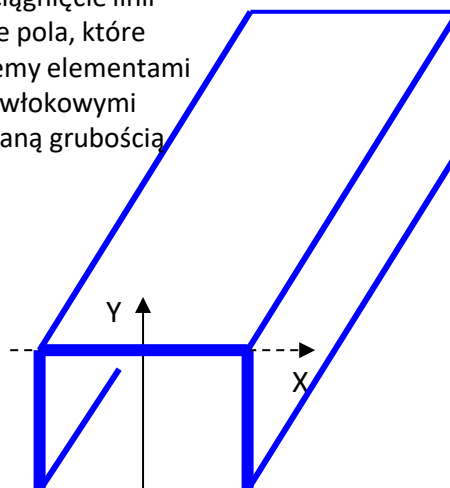
8 nodes 3-D space

DOF: UX, UY, UZ



Zad. 2

Wyciągnięcie linii daje pola, które pokryjemy elementami powłokowymi z zadaną grubością



SHELL181

4-Node Structural Shell

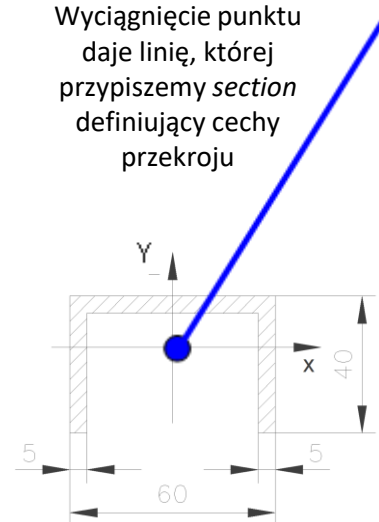
4 nodes 3-D space

DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ



Zad. 3

Wyciągnięcie punktu daje linię, której przypiszemy *section* definiujący cechy przekroju



BEAM188

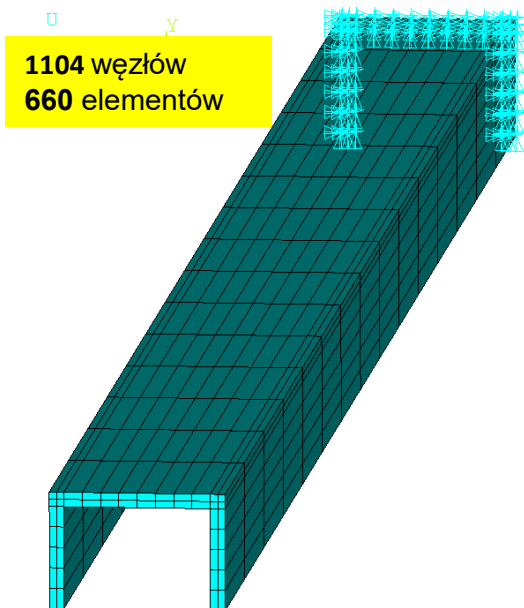
Structural 3-D 2-Node Beam

2 nodes 3-D space

DOF: UX, UY, UZ, ROTX, ROTY, ROTZ

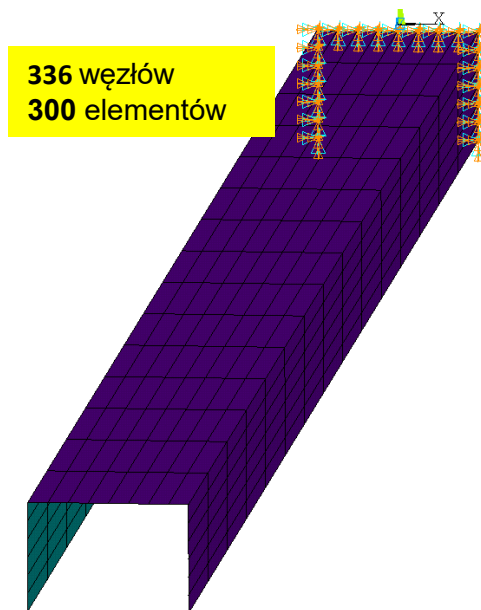


UWAGA na wybór jednostek: SI (N, m, s, kg) lub mod_SI (N, mm, s, t)



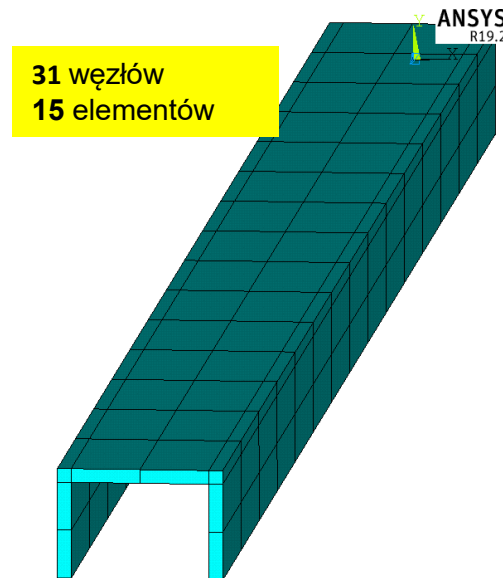
1104 węzłów
660 elementów

Ceowka 3D



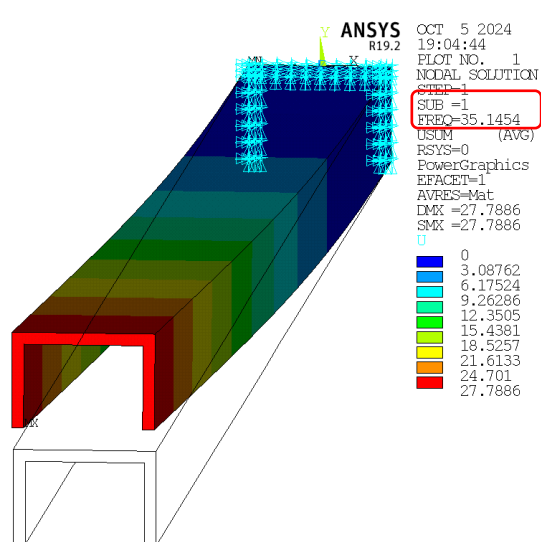
336 węzłów
300 elementów

$$\omega_{analit1} = 219 \text{ rad/s}$$



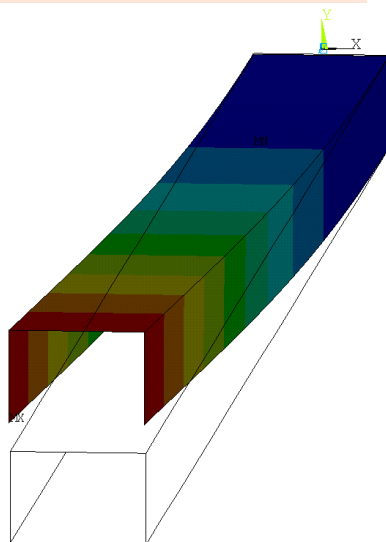
31 węzłów
15 elementów

Ceowka beam



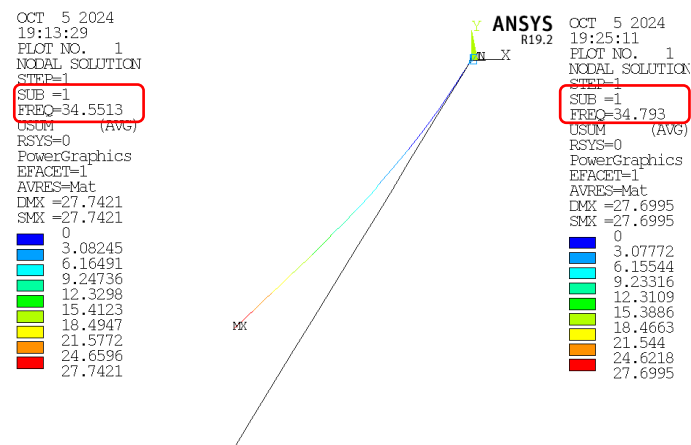
Ceowka 3D

$$\omega_1 = 2\pi f = 221 \text{ rad/s}$$



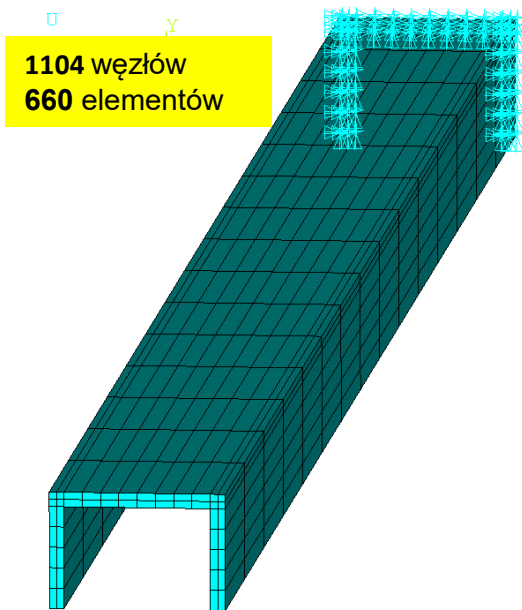
Ceowka shell

$$\omega_1 = 2\pi f = 217 \text{ rad/s}$$

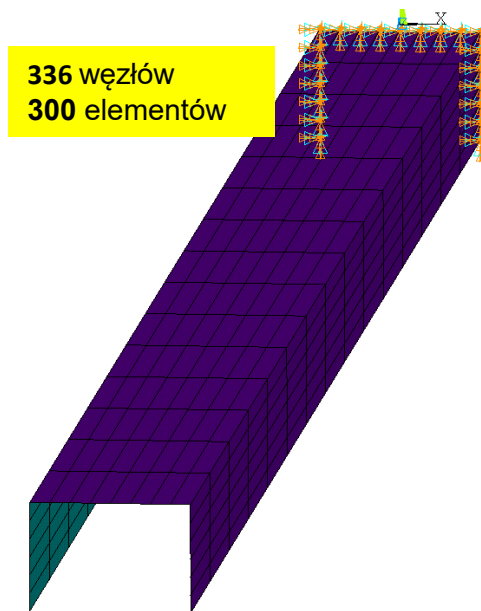


beam

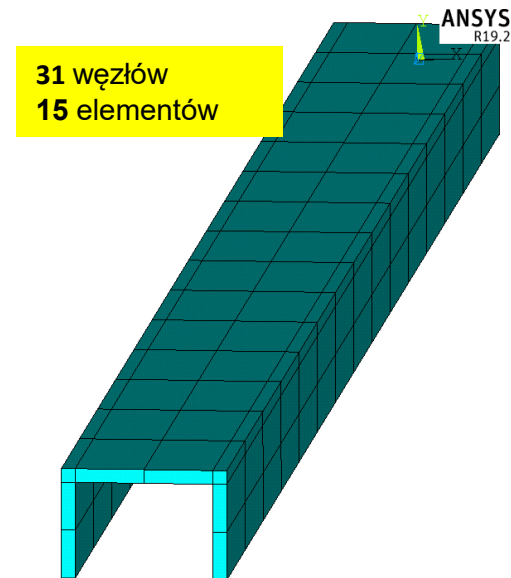
$$\omega_1 = 2\pi f = 218.5 \text{ rad/s}$$



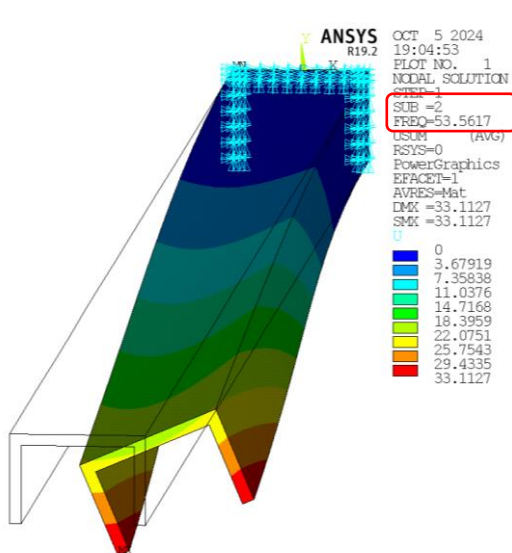
Ceowka 3D



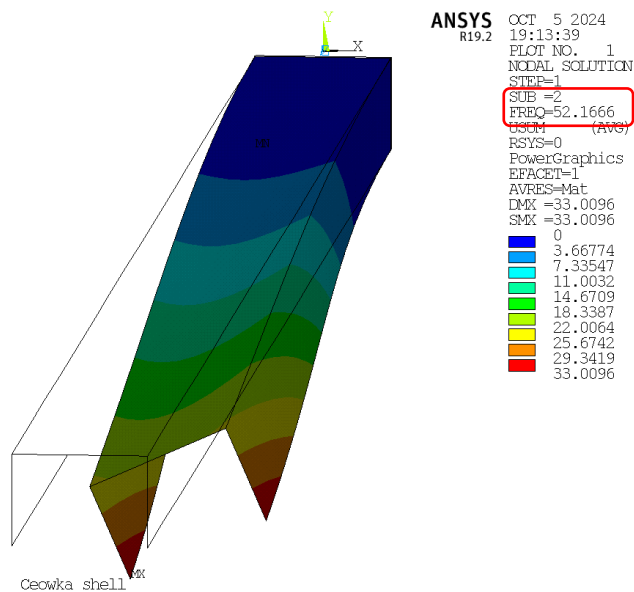
Ceowka shell



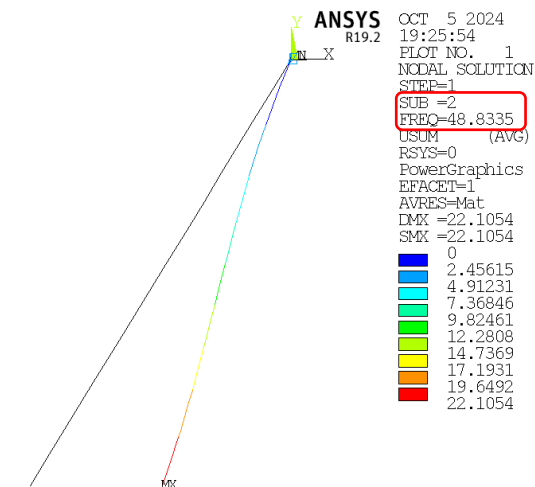
Ceowka beam



$$\omega_2=2\pi f=336 \text{ rad/s}$$

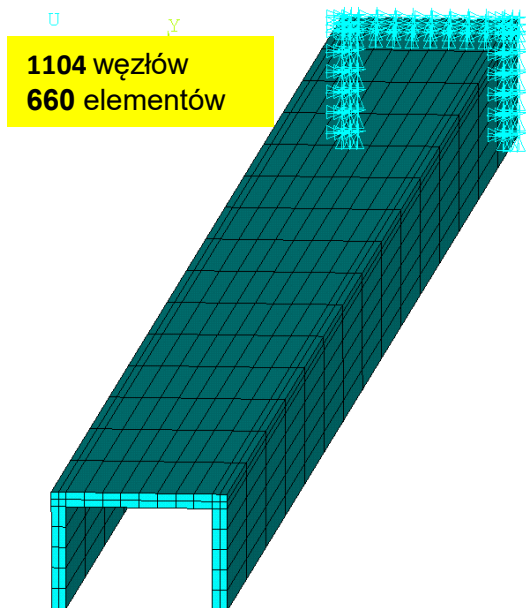


$$\omega_2=2\pi f=328 \text{ rad/s}$$

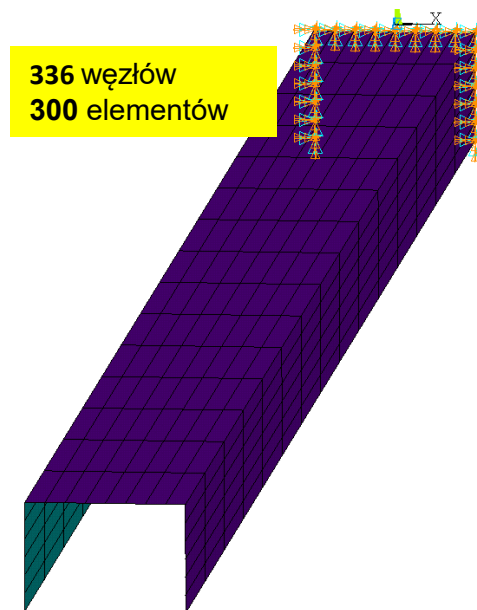


Ceowka beam

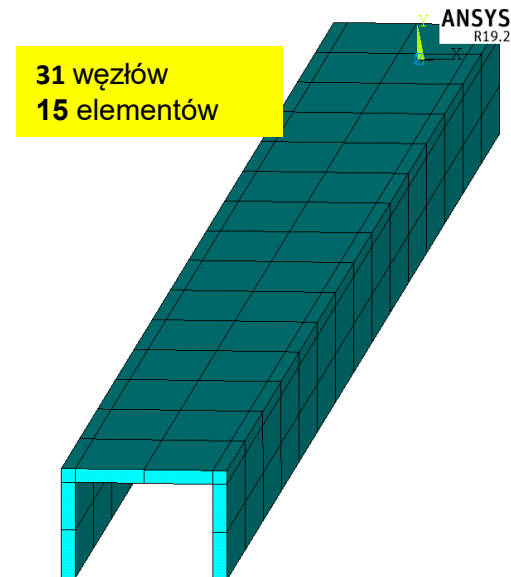
$$\omega_2=2\pi f=307 \text{ rad/s}$$



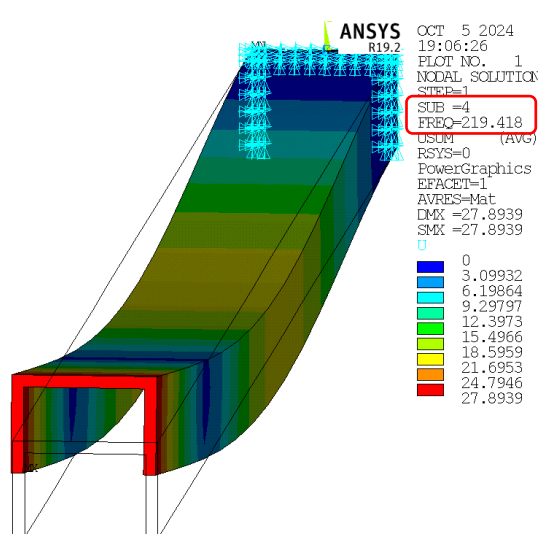
Ceowka 3D



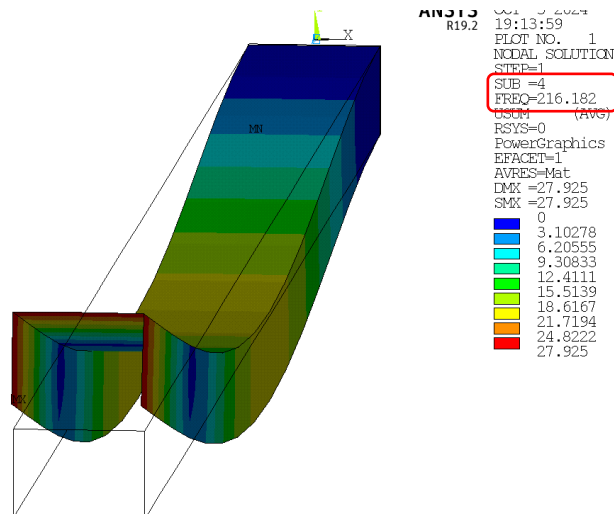
$$\omega_{analit2} = 1373 \text{ rad/s}$$



Ceowka beam

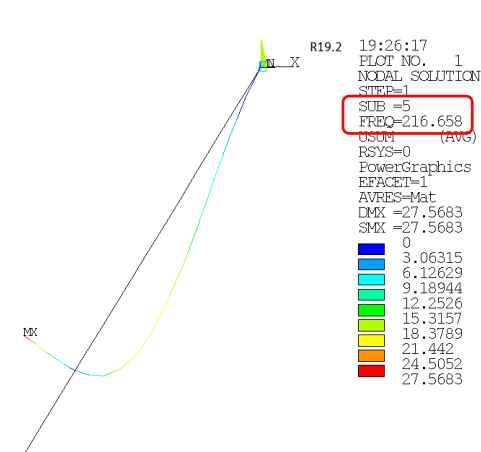


$$\omega_4 = 2\pi f = 1378 \text{ rad/s}$$



Ceowka shell

$$\omega_4 = 2\pi f = 1358 \text{ rad/s}$$



Ceowka beam

$$\omega_5 = 2\pi f = 1361 \text{ rad/s}$$

Pełna dynamika

Wszystkie typy analizy dynamicznej w programie ANSYS opierają się na następującym ogólnym równaniu ruchu dla układu elementów skończonych:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F(t)\}$$

gdzie: $[M]$ macierz masy, $[C]$ macierz tłumienia, $[K]$ macierz sztywności
 $\{\ddot{u}\}$ wektor przyspieszenia, $\{\dot{u}\}$ wektor prędkości, $\{u\}$ wektor przemieszczenia węzłowego
 $\{F\}$ wektor obciążenia, (t) czas

Analiza dynamiki nieustalonej (*znana również jako analiza historii czasu*) jest używana do określania odpowiedzi dynamicznej konstrukcji poddanej obciążeniom zależnym od czasu.

Istnieją trzy podstawowe metody rozwiązania dynamiki nieustalonej:

- **pełna metoda dynamiki nieustalonej** (*jest najbardziej ogólna, ma pełną zdolność nieliniową i może obejmować plastyczność, pełzanie, duże ugięcie, duże odkształcenie, usztywnienie naprężeniowe, kontakt i elementy nieliniowe*),
- **metoda redukcji stopni swobody** (*kondensacja układu równań do głównych stopni swobody (master degrees of freedom - MDOF)*),
- **metoda superpozycji modalnej** (*ruch ciała opisuje się za pomocą kombinacji liniowej postaci (wektorów) drgań własnych*).

Analiza modalna

$$([K] - \omega^2[M])\{u\} = 0$$

Analiza modalna jest przydatna w każdym przypadku, w którym interesujące są częstotliwości własne konstrukcji. Na przykład element maszyny powinien być zaprojektowany tak, aby wytwarzać częstotliwości własne, które zapobiegną drganiom elementu w jednym z jego podstawowych trybów w warunkach pracy. Analiza modalna jest używana do wyodrębniania częstotliwości własnych i postaci drgań konstrukcji. Jest ważna jako pierwszy krok w każdej analizie dynamicznej, ponieważ znajomość podstawowych postaci i częstotliwości własnych konstrukcji może pomóc scharakteryzować jej odpowiedź dynamiczną. Niektóre procedury rozwiązań nieustalonych i harmonicznym wymagają wyników analizy modalnej.

Odpowiedź harmoniczna

Analiza odpowiedzi harmonicznej służy do określania ustalonej odpowiedzi struktury liniowej na sinusoidalnie zmieniającą się funkcję wymuszającą. Ten typ analizy jest przydatny do badania skutków warunków obciążenia, które zmieniają się harmonicznie w czasie, takich jak te doświadczane przez obudowy, mocowania i fundamenty maszyn wirujących.

Spektrum odpowiedzi

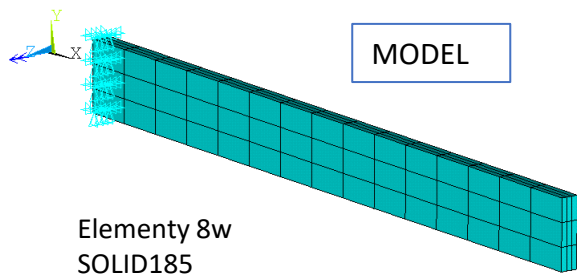
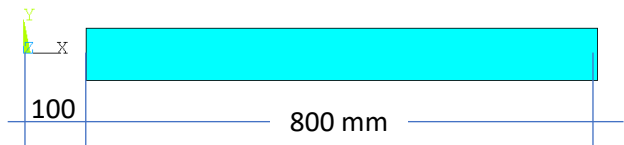
Analiza widma odpowiedzi może być używana do określania odpowiedzi konstrukcji na warunki obciążenia udarowego. Ten typ analizy wykorzystuje wyniki analizy modalnej wraz ze znanym widmem do obliczania maksymalnych przemieszczeń i naprężeń występujących w konstrukcji przy każdej z jej częstotliwości własnych.

Typowym zastosowaniem widma odpowiedzi jest analiza sejsmiczna, która służy do badania wpływu trzęsień ziemi na konstrukcje, takie jak systemy rurociągów, wieże i mosty.

Drgania losowe

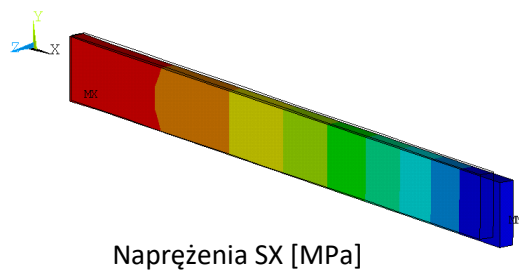
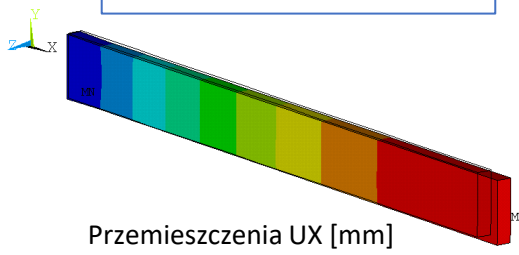
Analiza drgań losowych to rodzaj analizy widmowej służący do badania odpowiedzi konstrukcji na wzbudzenia losowe, np. generowane przez silniki odrzutowe lub rakietowe.

Przykład 5 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm²) wirujący względem osi Z (n=3000 obr./min)



wirujący pret n=3000 obr/min

ANALIZA STRUKTURALNA



UX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.773096
SMX =.773095

0
.085899
.171799
.257698
.343598
.429497
.515397
.601296
.687196
.773095

SX (AVG)
RSYS=0
PowerGraphics
EFACET=1
AVRES=Mat
DMX =.773096
SMN =17.7946
SMX =319.431

17.7946
51.3098
84.8249
118.34
151.855
185.37
218.886
252.401
285.916
319.431

Drgania swobodne

ANALIZA MODALNA

Drgania podczas obrotów

PRESTRES ON

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
FREQ=25.8854
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =20.0787
SMX =20.0787

Postać 1
f₁=25.88Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =2
FREQ=102.47
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =20.0229
SMX =20.0229

Postać 2
f₂=102 Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =3
FREQ=163.502
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =20.1805
SMX =20.1805

Postać 3
f₃=163Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =4
FREQ=464.222
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =24.8609
SMX =24.8609

Postać 4
f₄=464Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =1
FREQ=63.5978
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =19.2804
SMX =19.2804

Postać 1
f₁=63.60Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =2
FREQ=106.957
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =19.9407
SMX =19.9407

Postać 2
f₂=107 Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =3
FREQ=213.392
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =21.314
SMX =21.314

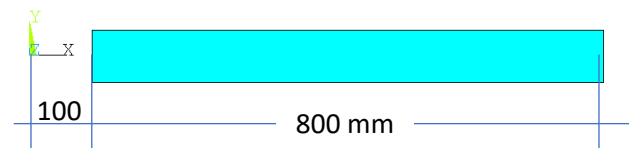
Postać 3
f₃=213Hz

NODAL SOLUTION
STEP=1
SUB =4
FREQ=469.573
USUM (AVG)
RSYS=0
DMX =24.8833
SMX =24.8833

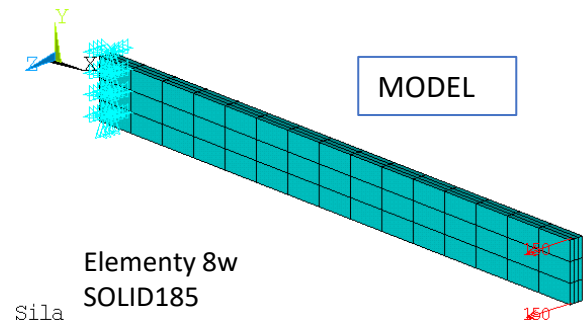
Postać 4
f₄=469Hz

Przykład 6 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm²)

Obciążony gwałtownie siłą (FZ=300 N)

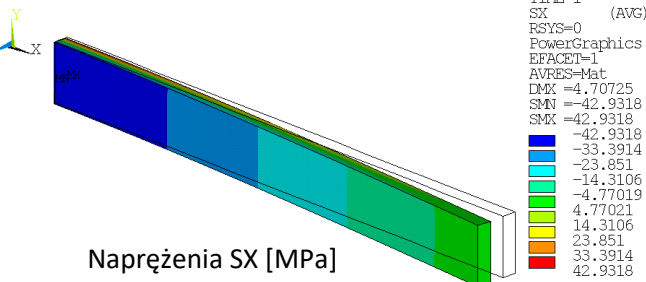
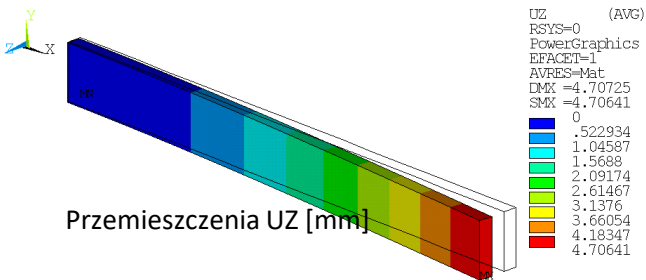


MODEL

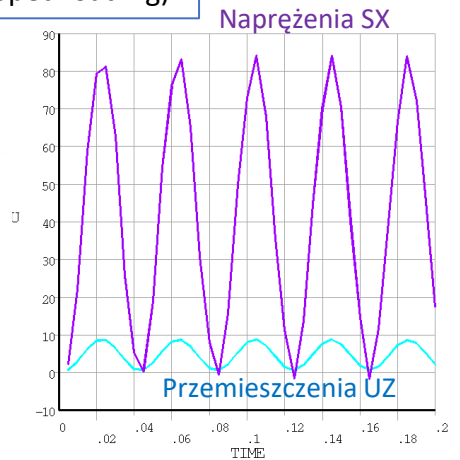
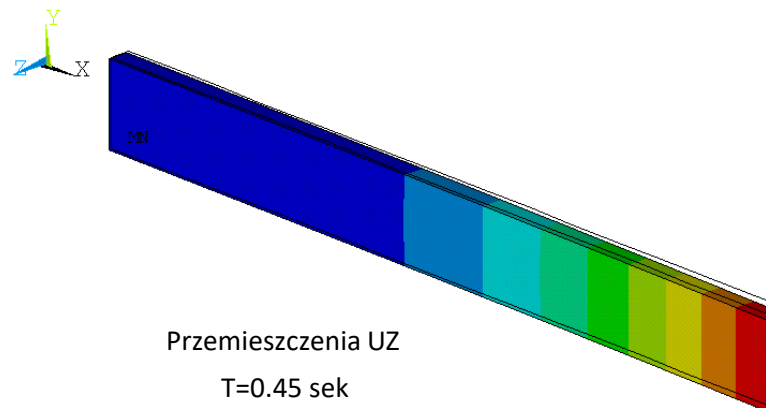
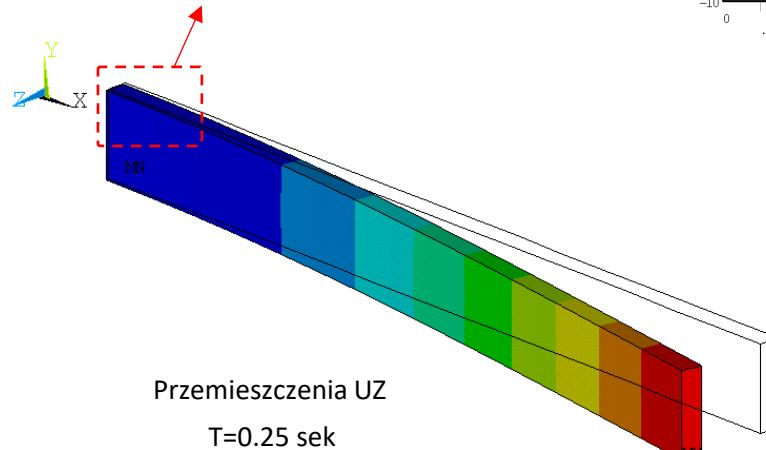
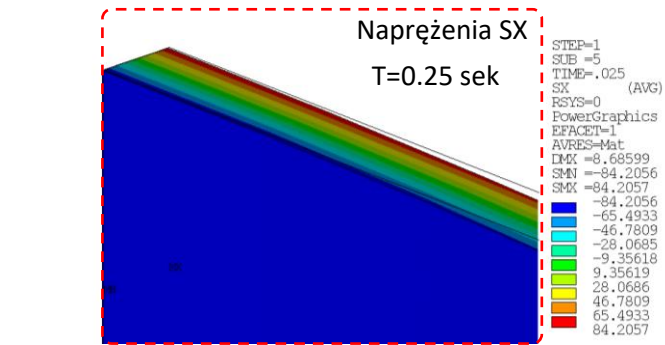


Sila

ANALIZA STRUKTURALNA



ANALIZA TRANSIENT – FULL (stepped loading)



Przykład 6 – stalowy płaskownik (A=20x80 mm²)

Obciążony gwałtownie siłą (FZ=300 N)

ANSYS
R19.2

OCT 19 2024

21:53:11

NODAL SOLUTION

STEP=1

SUB =1

TIME=.005

UZ (AVG)

RSYS=0

PowerGraphics

EFACET=1

AVRES=Mat

DMX =.774648

SMX =.77439

0

.086043

.172087

.25813

.344173

.430216

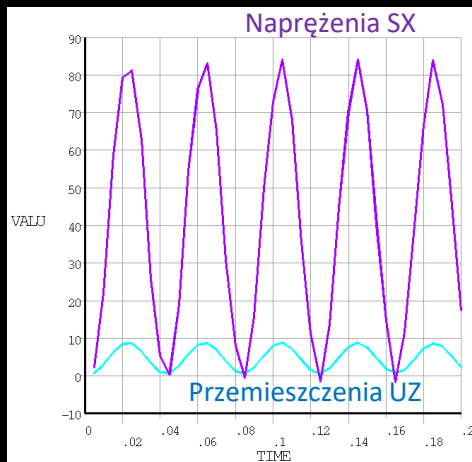
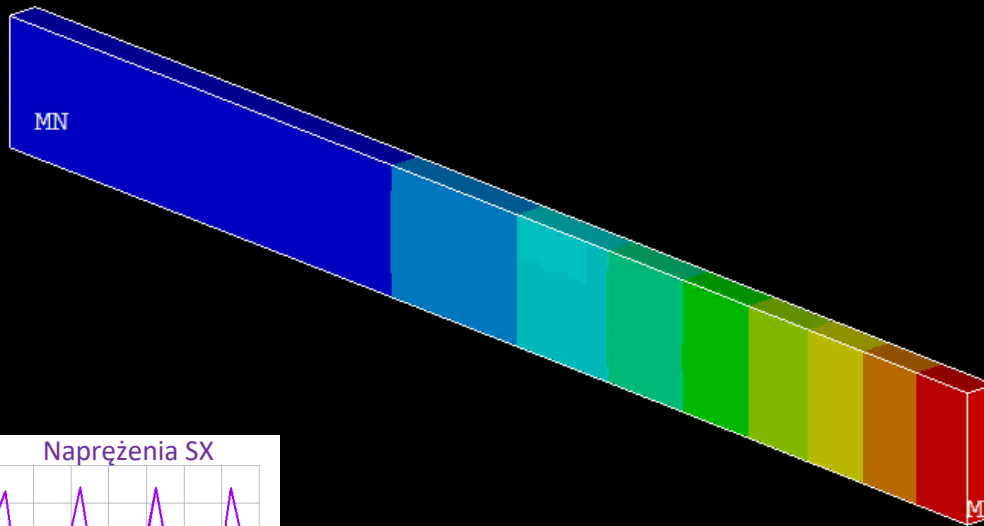
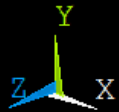
.51626

.602303

.688346

.77439

ANALIZA TRANSIENT – FULL (stepped loading)



Sila FZ=300N NL

